609. regular ナ境界点ニ関スル一注意

井上　正雄（阪大）

曾ツテ本誌93号419ニヲイテ，Beurling ノ criterion of regularity ヲ充サナイ regular ナ境界点（Dirichlet ノ問題ニ関スル）ノ一例ヲ示シテオイタノデアルガ，アノ例ハ Raynor ノ criterion ニ簡単ニ當テ嵌ツテシマフノデアル。Raynor ノ criterion ト云フノハ ——

“平面上ノ領域 Ω ノ境界点 p ヲ中心トシテ適當ニ $r_n \downarrow 0$ ナル実数例ヲ次ノ如ク撰ブコトガ出来レバ，p ハ regular デアル：

p ヲ中心トシテ r_n ヲ半径トスル円周ヲ C_n トスルトキ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(\Omega\cdot C_n)}{r_n}=0$$

コヽニ $m(\Omega\cdot C_n)$ ハ $\Omega\cdot C_n$ ノ線測度ヲ表ハス”

ソコデ，コノ criterion ガ當テ嵌ラナイヤウニ前ノ例ヲ次ノ如ク修正スルコトガ出来ル。

$$R(|z|=1)=\Sigma$$
$$R(|z|<1)=E$$

$$R\left(z=\frac{1}{2}e^{i\theta},\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\Sigma_1,\quad E-\Sigma_1=E_1$$

Σ 上デ 1，Σ_1 上デ 0 ナル値ヲトル E_1 デノ調和函数ヲ $H_1(z)$ トシ，Σ_1 ノ両端 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ヲ次ノ條件ヲ満

足スル適當ナ曲線[1] Σ_1^* デ結ブ：

Σ 上デ 1, Σ_1^* 上デ 0 ナル値ヲトル $E_1^* = E - \Sigma_1^*$ デノ調和函數ヲ $H_1^*(z)$ トスルトキ

$$|H_1(z) - H_1^*(z)| < \frac{1}{2}, \quad z \in E_1 \cdot E_1^*$$

次ニ

$$R\left(z = \frac{1}{2^2} e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\pi}{2^2}\right) = \Sigma_2,$$

$$E_1^* - \Sigma_2 = E_2$$

Σ 上デ 1, Σ_1^*, Σ_2 上デ 0 ナル値ヲトル．E_2 デノ調和函數ヲ $H_2(z)$ トシ，更ニ Σ_2 ノ兩端ヲ次ノ條件ヲ滿足スル適當ナ曲線 Σ_2^* デ結ブ：

Σ 上デ 1, Σ_1^*, Σ_2^* 上デ 0 ナル値ヲトル $E_2^* = E_1 - \Sigma_2^*$ デノ調和函數ヲ $H_2^*(z)$ トスルトキ

$$|H_2(z) - H_2^*(z)| < \frac{1}{2^2}, \quad z \in E_2 \cdot E_2^*$$

以下同樣ノコトヲ繰リ返シテ行ク，即チ Σ_n, E_n, H_n, Σ_n^*, E_n^*, H_n^* マデ作リ得タトキ

$$R\left(z = \frac{1}{2^{n+1}} e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \Sigma_{n+1},$$

$$E_n^* - \Sigma_{n+1} = E_{n+1}$$

トシ，

---

1) コノ曲線ニ對シ更ニ後ヨリ條件ヲ附加スルノデアルガ，カヽル曲線ガ恒ニ存在スルコトハ前談話 603 ニヨイテ既ニ明カデアル。

Σ 上デ 1, Σ_1^*, ……… Σ_n^*, Σ_{n+1} 上デ 0 ナル値ヲトル E_{n+1} デノ調和函数ヲ $H_{n+1}(z)$ トシ, Σ_{n+1}^* ヲ Σ 上デ 1, Σ_1^*, ………, Σ_{n+1}^* 上デ 0 ナル値ヲトル調和函数ヲ $H_{n+1}^*(z)$ トスルトキ

$$|H_{n+1}(z)-H_{n+1}^*(z)|<\frac{1}{2^{n+1}}, \quad z\in E_{n+1}\cdot E_{n+1}^*$$

ナル如キ Σ_{n+1} ト両端ヲ同ジクスル適當ナ曲線トスル。

以上ノ方法デ E_n^*, $H_n^*(z)$ $(n=1,2,\text{………})$ ヲ作ル。

サテ

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n^* = \Omega_0^*$$

$$\Omega_0^* - \{0\} = \Omega^*$$

トスルトキ, 原点 0 が Ω^* ノ *regular* ナ境界点ナルコトが証明サレル。方法ハ前ノト殆ンド同一デアル。簡単ニ述ブレバ

Ω^* デ

$$\lim_{n\to\infty} H_n^*(z) = H(z) > 0$$ トナリ $H(z)$ が調和函数トナル。

更ニ

$$H_n(0) < \frac{1}{2^{n+1}}$$ デアルカラ

$$H_n^*(0) < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n}$$

トナリ, コレト H_n^* ノ単調性トヨリ

$$\overleftarrow{H}\,\overrightarrow{(0)} = 0$$

ナルコトが証明サレル。

ヨツテ, Bouligand ノ定理ニヨリ, 0 が $\mathfrak{D}^*$ ノ regular ナ境界点ナルコトが解ル。

Σ_n^* ヲ充分 Σ_n ニ近クトルコトニヨリ raynor ノ criterion ニモ亦 Beurling ノ criterion ニモ當テ嵌ラナイヤウニ出来ルコトハ明白デアル。

例ヘバ δ_n, Σ_n^* ヲ夫々次ノ如クトルコトが出來ル:

i) $\frac{1}{2^n}, \left(\frac{1}{2^n}+\delta_n\right)e^{i\pi\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}, \frac{1}{2^n}e^{-i\frac{\pi}{2^n}}$

ヲ通ル円弧ヲ Σ_n^* トスルトキ,

$$\left|H_n(z)-H_n^*(z)\right|<\frac{1}{2^n}, \qquad z\in E_n^*\cdot E$$

ii) $\sum^{\infty} \log\left(1+2^n\delta_n\right)<+\infty$

カクシテ定メラレタル Σ_n^* ニヨツテ出來ル領域 $\mathfrak{D}^*$ ハ確ニ求ムルモノノ一ツデアル。